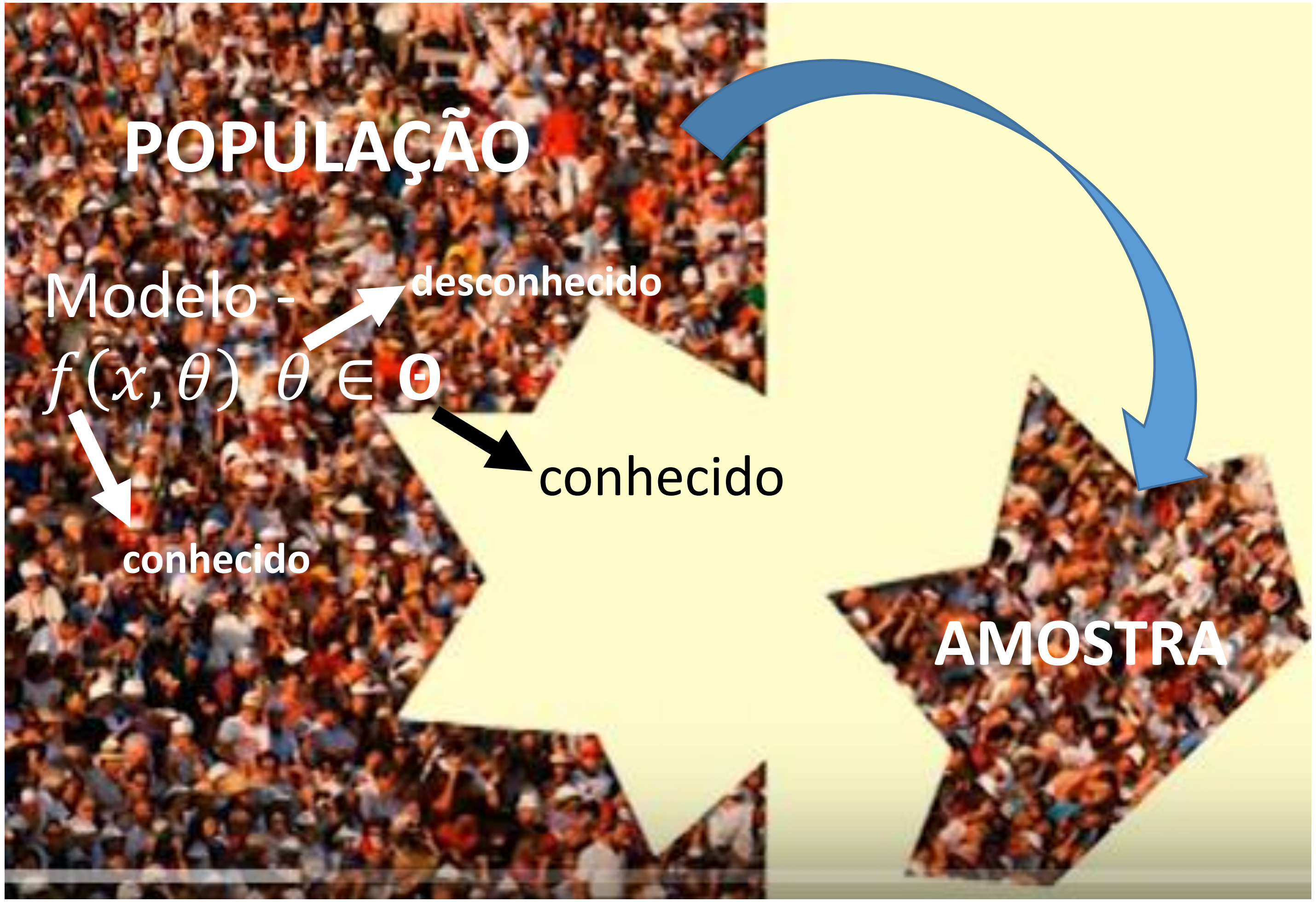
ESTIMAÇÃO



Estimar é utilizar a informação da amostra para "adivinhar" o valor de θ.

Dois aspectos a ter em, conta: a **precisão** e a **confiança.**

Ideia Importante $\rightarrow$ Fixada a dimensão da amostra, quanto mais precisa a resposta, menor a confiança que nela se deposita.

A estimação paramétrica desenvolve-se privilegiando: a precisão (**estimação por pontos**)
a confiança (**estimação por intervalos**).

ESTIMAÇÃO

Ter presente que o parâmetro de interesse θ pode ser:

- **Multidimensional**

Exemplo $\rightarrow$ Suponha que a valorização de um activo financeiro tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.
Observada uma amostra casual pretende-se estimar μ (rendibilidade esperada) e σ^2(risco).

- **Função do(s) parâmetro(s) da distribuição**

. Exemplo $\rightarrow$ Suponha-se que o número de sinistros originados anualmente por uma apólice de seguro automóvel tem distribuição de Poisson de parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$ (desconhecido). Em vez de nos interessarmos pelo parâmetro (média do fenómeno) podemos estar interessados numa função de $\boldsymbol{\lambda}$, por exemplo, $P(X=0|\boldsymbol{\lambda})=e^{-\boldsymbol{\lambda}}$, probabilidade de não se verificar nenhum sinistro. Então pretende-se estimar $\tau(\boldsymbol{\lambda})=e^{-\boldsymbol{\lambda}}$ que traduz essa probabilidade

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

- **Conceitos Fundamentais:**
  - **Estimador**: é uma variável aleatória, função da amostra casual e representa-se por $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) \Rightarrow$ é uma estatística.
    - Por exemplo: $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \bar{X}$ média da amostra
  - **Estimativa**: é um número assumido pelo estimador para a particular amostra que se observou. Representa-se por $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$.
    - Por exemplo: $t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{x}$

- **Dois problemas em aberto**:

  - Como encontrar estimadores para determinado parâmetro?

  - Encontrado um ou mais estimadores, como avaliar a sua qualidade?

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

↓

IDEIA

Utilizar os momentos da amostra para estimar os correspondentes momentos da população e, a partir daí, estimar os parâmetros de interesse

- Existem outros métodos de estimação por pontos: Método da máxima verosimilhança. (Não vai ser estudado este semestre)

Método dos momentos

Momentos da população tem de existir

Momentos em relação à origem da População		Momentos empíricos ou da amostra
$\mu'_1 = E(X)$	$=$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\mu'_2 = E(X^2)$	$=$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
$\vdots$		$\vdots$
$\mu'_r = E(X^r)$	$=$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n}$

Momentos da amostra existem sempre

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

- **Formalização**:
  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população

$$f(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \quad \left(\overbrace{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k}^{desconhecidos}\right) \in \boldsymbol{\Theta}$$

  - Constrói-se um sistema igualando os k 1ºs momentos da população aos k 1ºs momentos da amostra.

$$\boxed{\mu'_r = \psi_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)} \quad = \quad \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n} = \psi_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)}$$

  - Resolve-se o sistema em ordem aos k parâmetros desconhecidos que se admite ter solução única $\widetilde{\theta}_j = \boldsymbol{\phi}_j(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad j = 1, 2, \cdots, k$
  - Diz-se que os estimadores $\widetilde{\theta_1}, \widetilde{\theta_2}, \cdots, \widetilde{\theta_k}$ foram obtidos pelo método dos momentos

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

- Exemplo 1 Considere-se uma população de Bernoulli da qual se extraiu uma amostra casual de dimensão n com o objectivo de estimar θ.

Como se sabe:

- 1º momento da população é $\mu_1' = E(X) = \theta$
- 1º momento da amostra é $\bar{X}$.
- sistema - $\bar{X} = \theta$
- solução: Estimador $\rightarrow \tilde{\theta} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Estimativa $\tilde{\theta} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ **Cuidado com a notação !**

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Método dos momentos

- Exemplo 1 Considere-se uma população normal da qual se extraiu uma amostra casual de dimensão n com o objectivo de estimar μ e σ^2

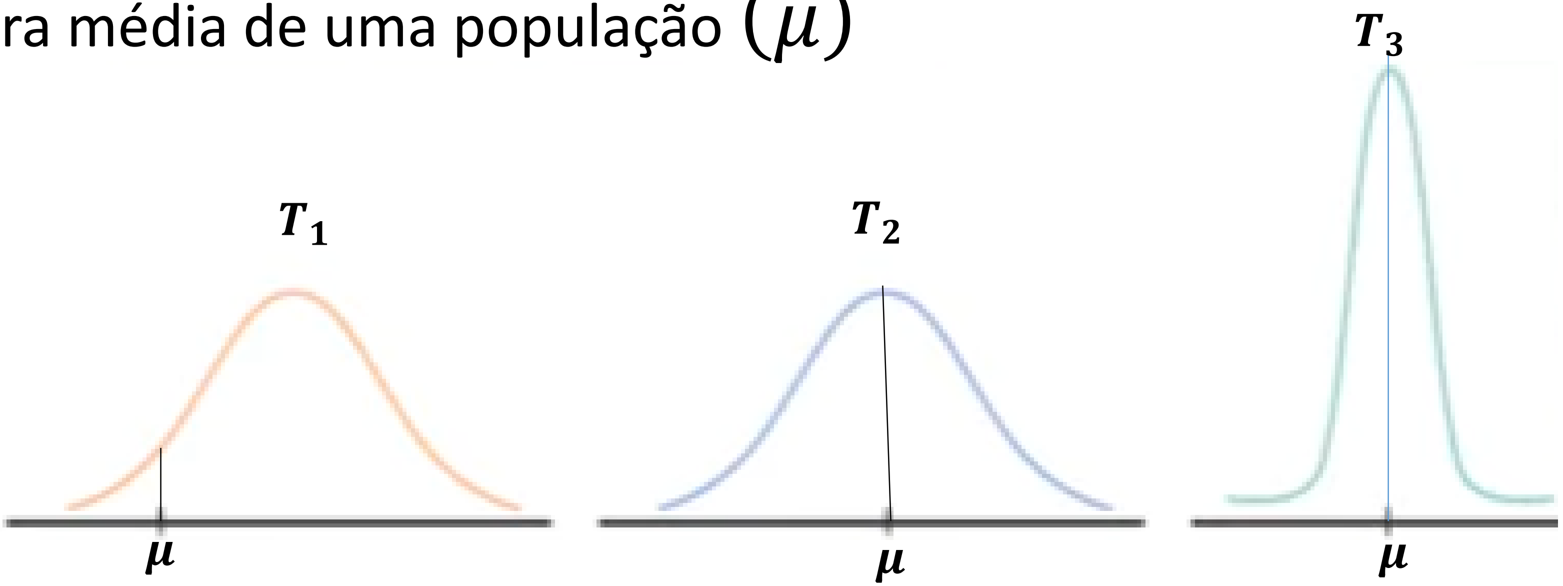
Como se sabe:

- momentos da população: $\mu_1' = E(X) = \theta; \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$
- momentos da amostra: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ e $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
- sistema - $\begin{cases} \bar{X} = \mu \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$
- solução: Estimador $\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $\widetilde{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = S^2$

Estimativa $\tilde{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; $\widetilde{\sigma^2} = s^2$ **Cuidado com a notação !**

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Distribuições por amostragem de 3 diferentes estatísticas para estimar a verdadeira média de uma população (μ)



Qual dos estimadores vos parece melhor entre T_1 e T_2? E entre T_2 e T_3

Como avaliar a qualidade de um estimador?

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador centrado ou não enviesado

Definição: Um estimador $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ para θ diz-se centrado ou não enviesado quando $E(T) = \theta \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

- Observação:
  - O conceito de estimador centrado só se aplica se existir $E(T)$

Enviesamento: Se $E(T) \neq \theta$, então o estimador diz-se enviesado e a diferença $\mathrm{Env}(T) = E(T) - \theta$ mede o enviesamento.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população de Bernoulli $[X_i \sim B(1, \theta)]$. Será $\bar{X}$ um estimador centrado para θ?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) = \frac{1}{n} * n\theta = \theta$$

Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população $N(\mu, \sigma^2)$. Será S^2 um estimador centrado para σ^2?

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \Rightarrow E(S^2) \neq \sigma^2 \text{ e } Env(S^2) = E(S^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\sigma^2/n$$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador Eficiente
  - Compara dois estimadores centrados analisando a respectiva dispersão.

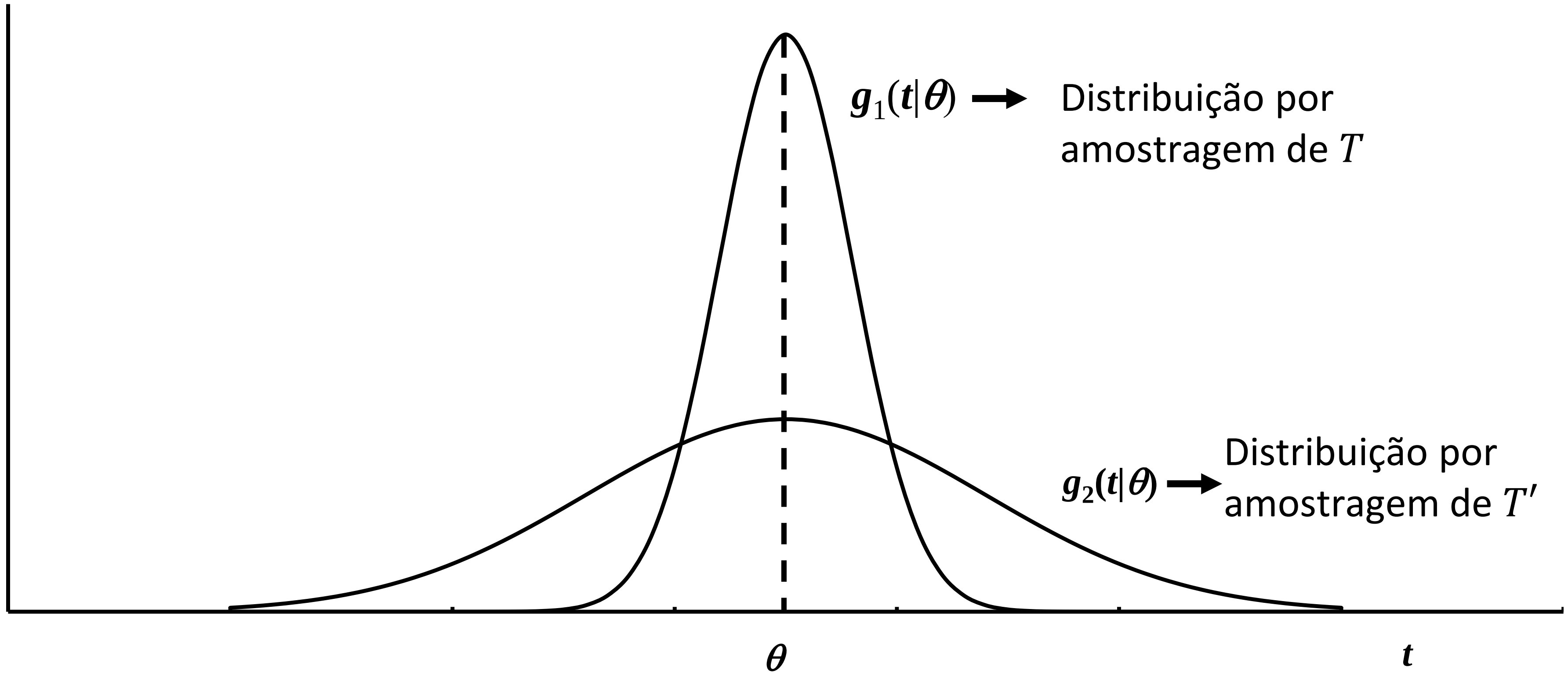
Definição: Sejam T e T' dois estimadores centrados para θ. O estimador T é mais eficiente que T' quando $Var(T) \leq Var(T') \;\forall\; \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

Definição: O estimador T é o mais eficiente se a condição $Var(T) \leq Var(T')$ se verificar para qualquer outro estimador T' centrado para θ.

- Observação:
  - A eficiência exige a existência de momentos de 2ª ordem dos estimadores.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores



O estimador T é mais eficiente que T'

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- **Uma vez que a eficiência está associada ao conceito de estimador centrado, que fazer quando se quer comparar estimadores enviesados?**

Erro quadrático médio

Definição: Seja um estimador $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ para θ. O erro quadrático médio de T é dado por $EQM(T) = E[(T-\theta)^2] = Var(T) + [E(T) - \theta]^2$

- Observações:
  - Se o estimador T é centrado, $EQM(T) = Var(T)$;
  - O estimador T é "melhor" que T' quando $EQM(T) \leq EQM(T') \; \forall \, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Estimador consistente
  - Exige-se como condição mínima para um estimador ser um “bom” estimador que a precisão do estimador aumente quando aumenta a dimensão da amostra.

T 7.2: As condições $\lim_{n\to\infty} E(T) = \theta$ e $\lim_{n\to\infty} Var(T) = 0$ são suficientes para que T seja estimador (simplesmente) consistente para θ

- Observação:
  - A consistência não é uma propriedade muito selectiva.
  - Um estimador que não seja consistente não deve ser utilizado.

ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores

- Exemplo: Seja uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população $Po(\boldsymbol{\lambda})$. O estimador centrado paraT$(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \bar{X}$ será um estimador consistente para $\boldsymbol{\lambda}$?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) = \frac{1}{n} * n\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} * n\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n} = 0$$

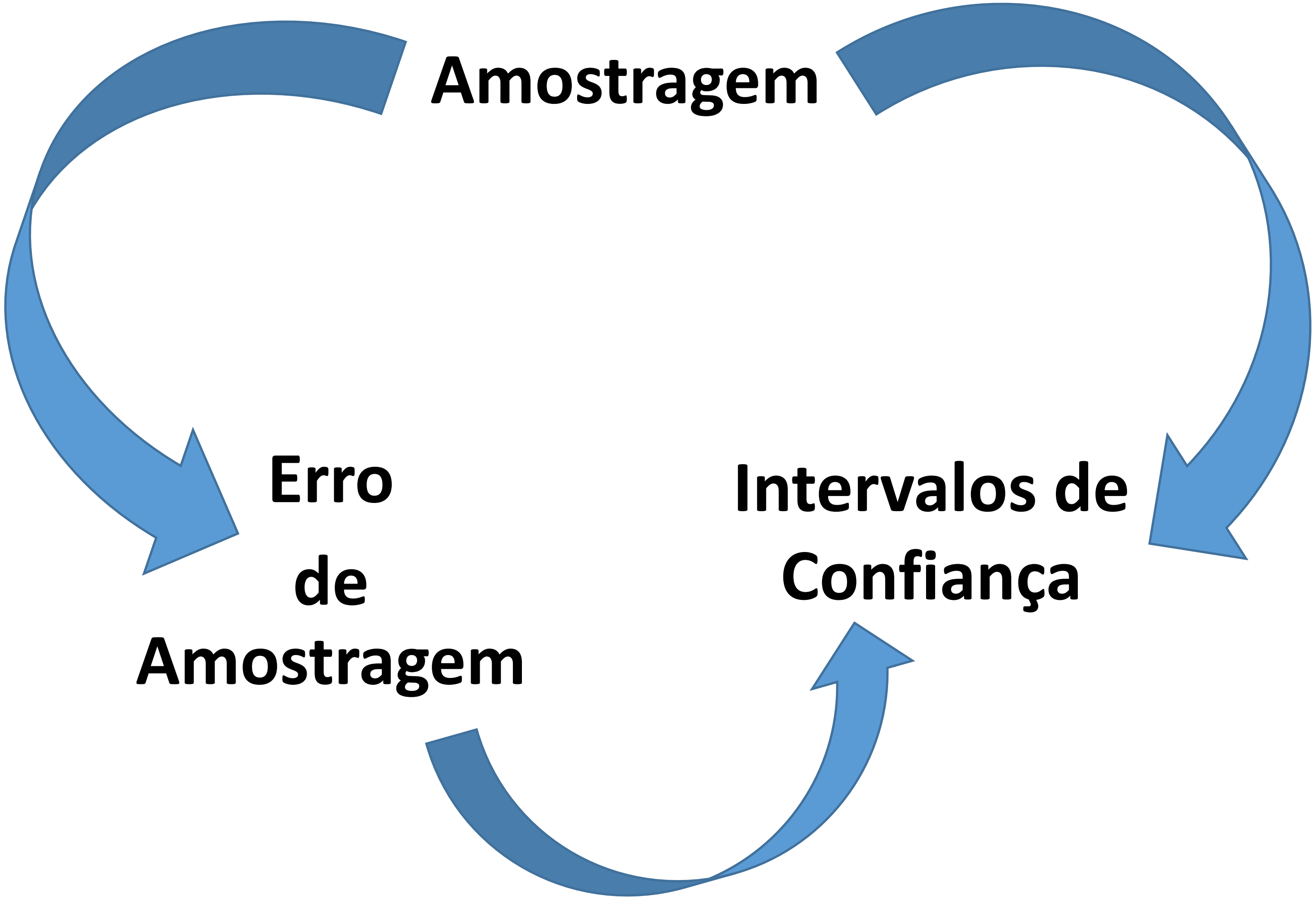
ESTIMAÇÃO POR PONTOS

Propriedades dos estimadores obtidos pelo Método dos Momentos

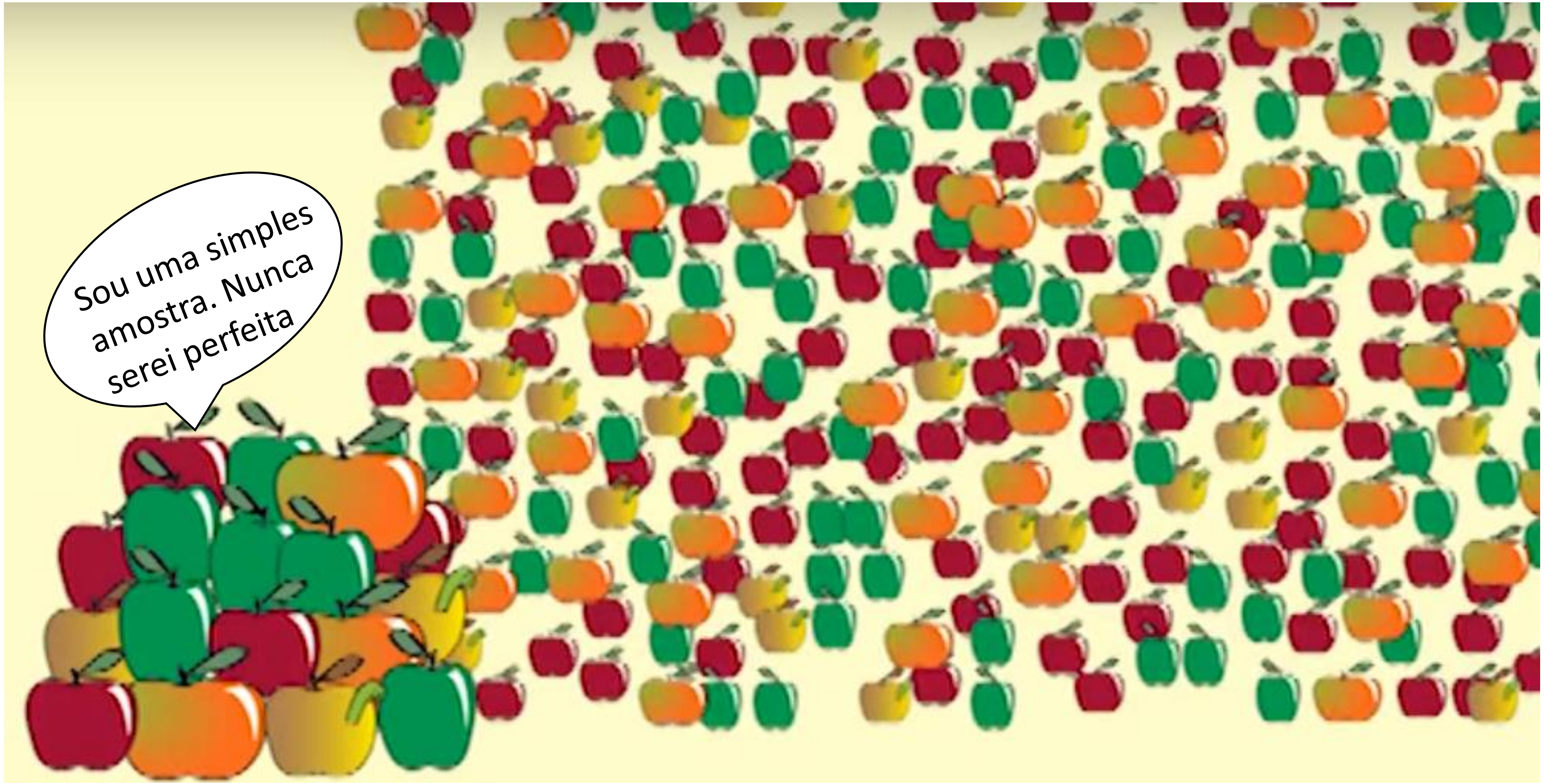
Em condições bastante gerais, são consistentes e possuem distribuição aproximadamente normal quando a dimensão da amostra é muito grande (distribuição assintótica).

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Estimação por intervalos privilegia a confiança



ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS



ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

VARIABILIDADE DA AMOSTRA

Para diferentes amostras da mesma população as estimativas assumem diferentes valores

$\bar{x} = 149grs$

$\bar{x} = 130grs$

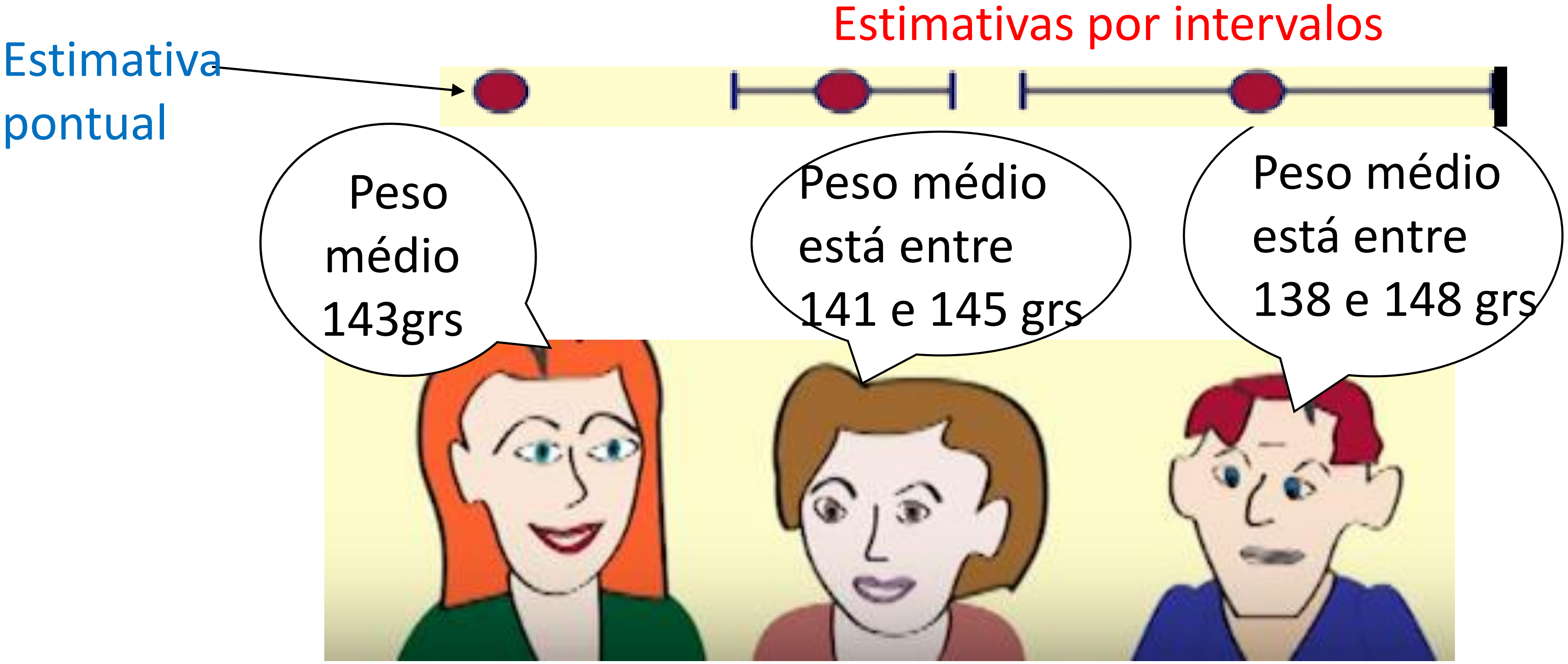
$\bar{x} = 153grs$

Variação devido à amostragem

ERRO DE AMOSTRAGEM (ε)

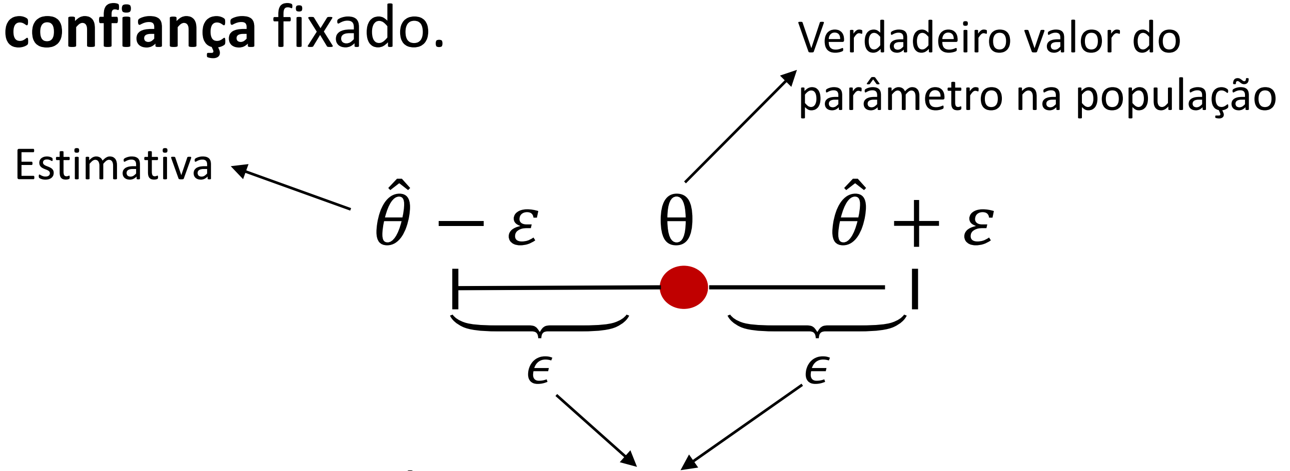
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Quando estimamos um parâmetro de uma população é prática comum exprimir a estimativa sob a forma de um intervalo. O intervalo de confiança indica a **precisão** da estimativa associada a um **grau de confiança** fixado.



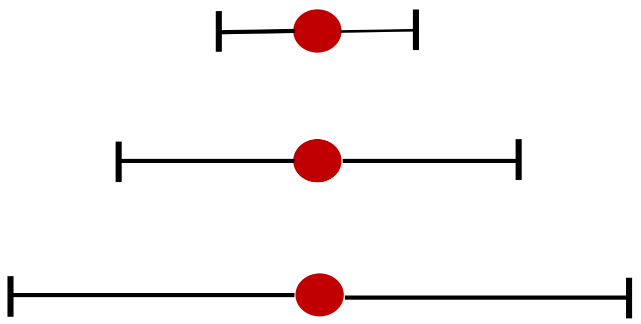
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

O intervalo de confiança $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)$ indica a **precisão** da estimativa associada a um **grau de confiança** fixado.



Erro de amostragem\margem de erro – medida de precisão

O que afecta a amplitude do Intervalo de confiança?



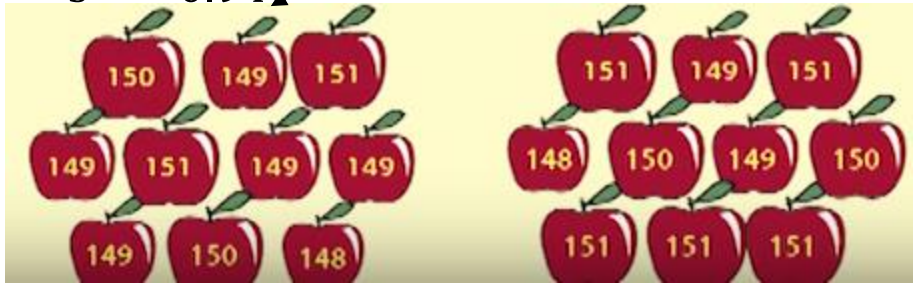
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

1. Variação na população

População com
pequena variação

População com
grande variação

$s^2 = 0.94$ $s^2 = 1.21$



$s^2 = 152$ $s^2 = 283$

Intervalos de confiança com
pequena amplitude

Intervalos de confiança com
grande amplitude

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

2. Variação na dimensão da amostra

Amostras pequenas contém pouca informação e variam mais umas das outras

Intervalos com maior amplitude

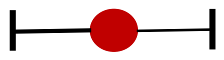
Amostras grandes contém mais informação e variam menos umas das outras

Intervalos com menor amplitude

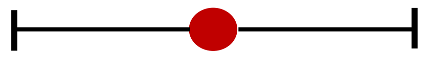
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

3. Variação no grau de confiança

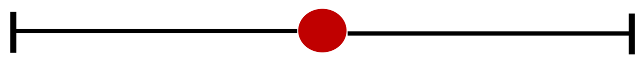
Intervalo de confiança a 90%



Intervalo de confiança a 95%



Intervalo de confiança a 99%



Quanto maior o grau de confiança maior a amplitude do intervalo

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

A média da população varia entre ...

A variância da população varia entre ...

A proporção na população varia entre ...

A diferença entre as médias de duas populações varia entre ...

A diferença entre as proporções de duas populações varia entre ...

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Cálculo do intervalo de confiança a $(1-\alpha) * 100\%$ para o parâmetro θ

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ amostra casual de uma população $f(x, \theta), \theta \in \boldsymbol{\Theta}$

Intervalo aleatório para θ

Se $T_1 = T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), T_2 = T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $T_1 < T_2$, com

$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \boldsymbol{\Theta},\; 0 < \alpha < 1$ (α não depende de θ),

Então (T_1, T_2) é um intervalo aleatório para θ de probabilidade $1-\alpha$.

Intervalo de confiança para θ

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ amostra particular realização de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$t_1 = T_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), t_2 = T_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, valores assumidos por T_1 e T_2

A qualquer intervalo (t_1, t_2) concretização do intervalo aleatório (T_1, T_2) chama-se intervalo de confiança a $(1-\alpha)$*100% para θ

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Cálculo do intervalo de confiança a $(1-\alpha) * 100\%$ para o parâmetro θ

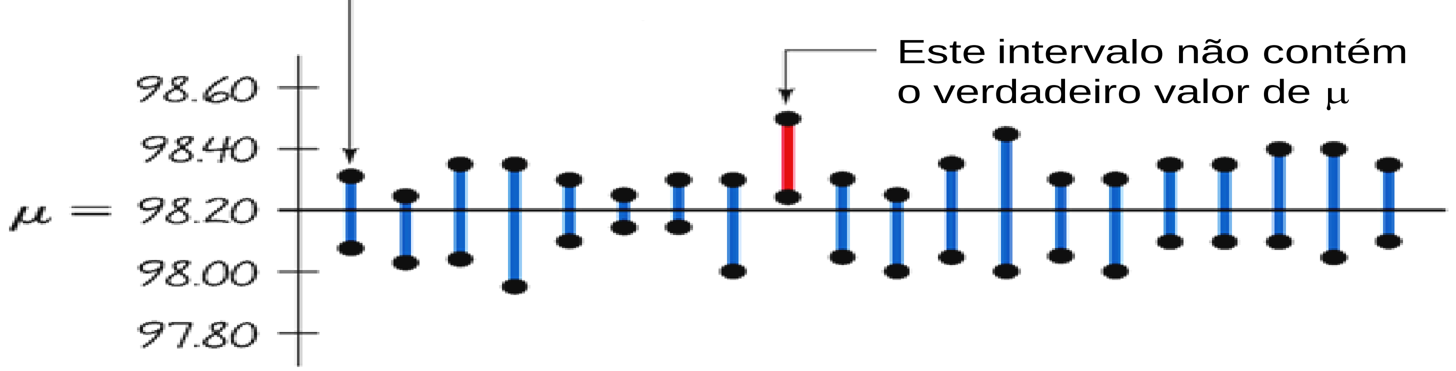
- Comentários:
  - As definições foram apresentadas para θ e não para $\tau(\theta)$ para simplificar a notação. A generalização é imediata.
  - **Só se atribui probabilidade ao intervalo aleatório**.
  - O conceito, tal como o vimos, é válido para $\mathbb{R}$. No caso de $\tau(\theta) \in \mathbb{R}^k, \ \ k > 1$ é necessário estendê-lo para **regiões de confiança**.

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Interpretação frequencista do intervalo de confiança

Seleccionadas várias amostras de idêntica dimensão, da população em estudo, e calculados os correspondentes intervalos de confiança, cerca de $100(1 - \alpha)\%$ dos intervalos calculados contêm o verdadeiro valor do parâmetro θ.

20 amostras $\Rightarrow$ 20 I. C. a 95% para μ



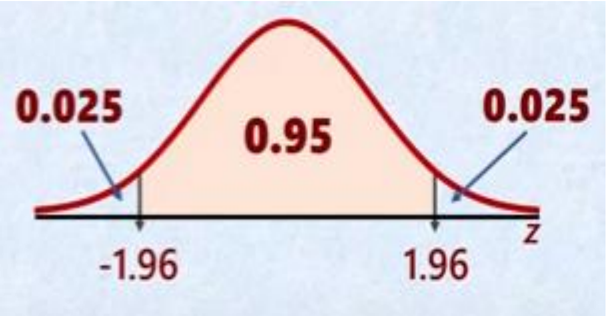
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância conhecida) – Populações normais

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$z_{\alpha/2} : P\left(-z_{\alpha/2} < T < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$-z_{\alpha/2}$ $\quad z_{\alpha/2}$

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Margem de erro

Intervalo confiança para μ a $(1-\alpha) * 100\% = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância conhecida)

Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 605)$

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Seja amostra casual (807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6)$\Rightarrow n = 5, \;\; \bar{x} = 825{,}84$

Variável fulcral $- T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow z_{0.025} = \text{invnorm}(0.025, 0, 1) = -1.96$ ou $z_{0.975} = \text{invnorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

Margem de erro - $\varepsilon = 1.96 \dfrac{24{,}597}{\sqrt{5}} = 21{,}56 \Rightarrow \bar{X} - 21{,}56 < \mu < \bar{X} + 21{,}56$

Intervalo aleatório para $\mu = (\bar{X} - 21{,}56 < \mu < \bar{X} + 21{,}56)$

Intervalo confiança para $\mu = (825.84 - 21.56, \;\; 825.84 + 21.56) = (804.28, \;\; 847.4)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Efeito da dimensão da amostra na amplitude do Intervalo de confiança para a média

Exemplo (continuação): População $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 605)$

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Amostra anterior: $n = 5$, $\bar{x} = 825{,}84$

$I.C.$ para $\mu = (804.28, \quad 847.4)$

Amplitude do $I.C. = 43.12$

Amplitude do intervalo de confiança reduz-se quando aumenta a dimensão da amostra

Amostra:
$$\left\{ \begin{matrix} 807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6, \\ 798.6, 812.2, 813.1, 839.4, 812.8 \end{matrix} \right\}$$

$n = 10$, $\bar{x} = 820.53$

$I.C.$ para $\mu = (805.28, \quad 835.78)$

Amplitude do $I.C. = 30.49$

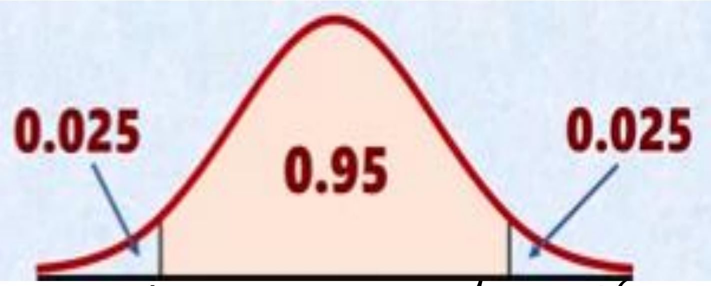
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida) – Populações normais

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$t_{\alpha/2} : P\left(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$-t_{\alpha/2}$ $t_{\alpha/2}$ $t(n-1)$

$$-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S'}{\sqrt{n}}$$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\dfrac{S'}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}\dfrac{S'}{\sqrt{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\mu = \left(\bar{x} - t_{\alpha/2}\dfrac{s'}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}\dfrac{s'}{\sqrt{n}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

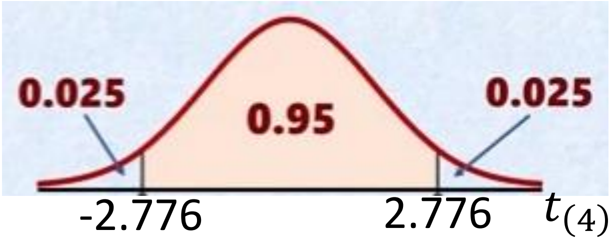
Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida)

Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 desconhecidos

Grau\nível de confiança$= 0.95 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$

Seja amostra casual (807.7, 790.7, 818.8, 853.4, 858.6)$\Rightarrow n = 5,\ \bar{x} = 825{,}84, s' = 29.352$

Variável fulcral $- T = \frac{\bar{X} - \mu}{s'/\sqrt{n}} \sim t\left(\underbrace{5-1}_{4}\right)$



$\Rightarrow t_{(4)}^{0.025} = \text{invt}(0.025, 4) = -2.776$ ou $t_{(4)}^{0.975} = \text{invt}(0.975, 4) = 2.776$

Margem de erro - $\varepsilon = 2.776 \frac{29.352}{\sqrt{5}} = 36.44 \quad \Rightarrow \quad \bar{X} - 36.44 < \mu < \bar{X} + 36.44$

Intervalo aleatório para $\mu = (\bar{X} - 36.44 < \mu < \bar{X} + 36.44)$

Intervalo confiança para $\mu = (825{,}84 - 36.44,\ 825.84 - 36.44) = (789.40,\ \ 862.28)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Efeito da variação do grau de confiança na amplitude do Intervalo de confiança para a média (variância desconhecida)

Exemplo: População $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 desconhecidos

Amostra anterior: $n = 5$, $\bar{x} = 825{,}84$, $s' = 29.352$

Grau de confiança $= 0.95$	Grau de confiança$= 0.99$
$\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$	$\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.99 \Leftrightarrow \alpha = 0.01$
$t_{(4)}^{0.025} = -2.776$	$t_{(4)}^{0.005} = -4.604$
$I.C.$ para $\mu = (789.40,\ 862.28)$	$I.C.$ para $\mu = (765.40,\ \ 886.28)$
Amplitude do $I.C. = 72.88$	Amplitude do $I.C. = 120.87$

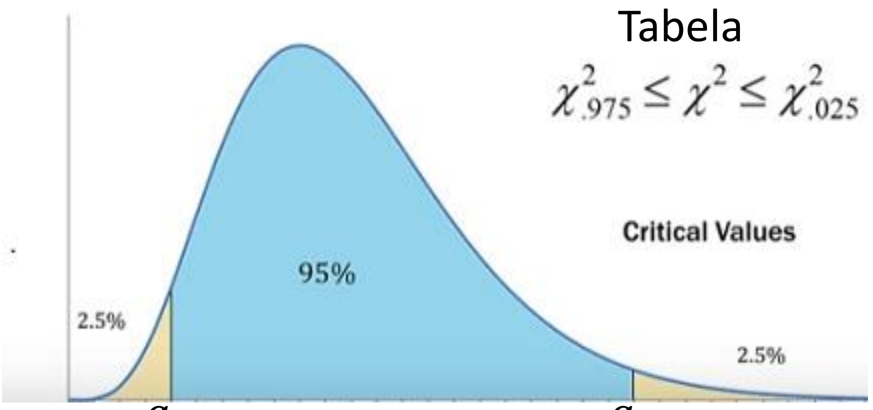
A amplitude do intervalo de confiança aumenta quando se aumenta o grau de confiança

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $T = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$



q_1 $\chi^2_{(0.975)}$ $\qquad$ q_2 $\chi^2_{(0.025)}$

$$q_1 < \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} < q_2$$

$$\frac{(n-1)S'^2}{q_1} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S'^2}{q_2}$$

Intervalo aleatório para $\sigma^2 = \left(\dfrac{(n-1)\boldsymbol{S'}^{\mathbf{2}}}{q_1}, \dfrac{(n-1)\boldsymbol{S'}^{\mathbf{2}}}{q_2}\right)$

Intervalo confiança para $\sigma^2 = \left(\dfrac{(n-1)\boldsymbol{s'}^{\mathbf{2}}}{q_1}, \dfrac{(n-1)\boldsymbol{s'}^{\mathbf{2}}}{q_2}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo: Ao investir em acções, geralmente há um trade-off: risco vs rendimento. Em termos financeiros, "risco" é sinónimo de variância no valor das acções. Algumas acções são estáveis (baixo risco), mas oferecem baixos retornos potenciais (GE), outras variam descontroladamente (maior risco), mas oferecem retornos potenciais mais elevados (Apple).

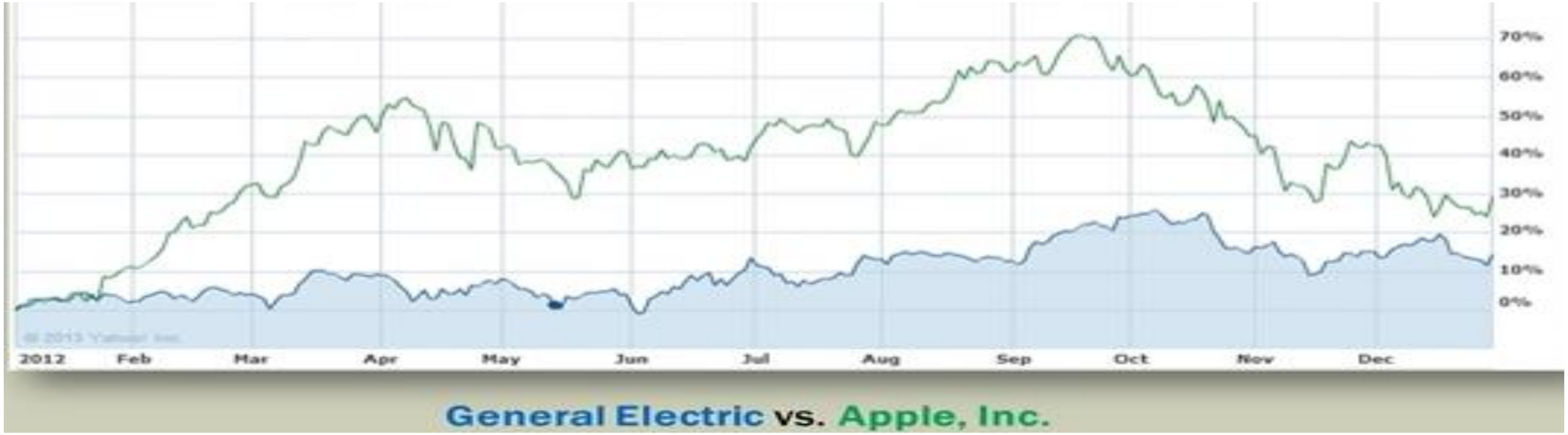
Suponham que compramos acções da GE e da Apple e as mantemos por um ano.

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

Rendimentos das acções em percentagem



Pense em cada tipo de acção como um vôo. Qual o vôo que vos deixará mais enjoados devido à turbulência?

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

Date	GE	APPL	GE%	AAPL%
January 2012	0.043869	0.119655	4.39%	11.97%
February 2012	0.026947	0.172533	2.69%	17.25%
March 2012	0.051809	0.100103	5.18%	10.01%
April 2012	-0.02451	-0.026306	-2.45%	-2.63%
May 2012	-0.02567	-0.010762	-2.57%	-1.08%
June 2012	0.096491	0.010796	9.65%	1.08%
July 2012	-0.00444	0.044801	-0.44%	4.48%
August 2012	-0.00198	0.089724	-0.20%	8.97%
September 2012	0.099801	0.002791	9.98%	0.28%
October 2012	-0.07535	-0.113841	-7.53%	-11.38%
November 2012	0.003376	-0.012450	0.34%	-1.25%
December 2012	0.002404	-0.095123	0.24%	-9.51%
Mean	0.016063	0.023493	1.61%	2.35%
Variance	0.002590	0.007330	25.89	73.30
Standard Dev.	0.050890	0.085618	5.09%	8.56%

Mean Monthly Return

GE = 1.61%   AAPL = 2.35%

Monthly Return Variance, s^2

GE = 25.89   AAPL = 73.30

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.025}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{.975}}$$

n = sample size

s^2 = sample variance

$$\chi^2_{.975} \le \chi^2 \le \chi^2_{.025}$$

$$3.82 \le \chi^2 \le 21.92$$

Critical Values

Monthly Return Variance, s^2

GE = 25.89

$$\frac{(12-1)25.89}{21.92} \le \sigma^2 \le \frac{(12-1)25.89}{3.82}$$

$$12.99 \le \sigma^2 \le 74.55$$

$$3.60\% \le \sigma \le 8.63\%$$

AAPL = 73.30

$$\frac{(12-1)73.30}{21.92} \le \sigma^2 \le \frac{(12-1)73.30}{3.82}$$

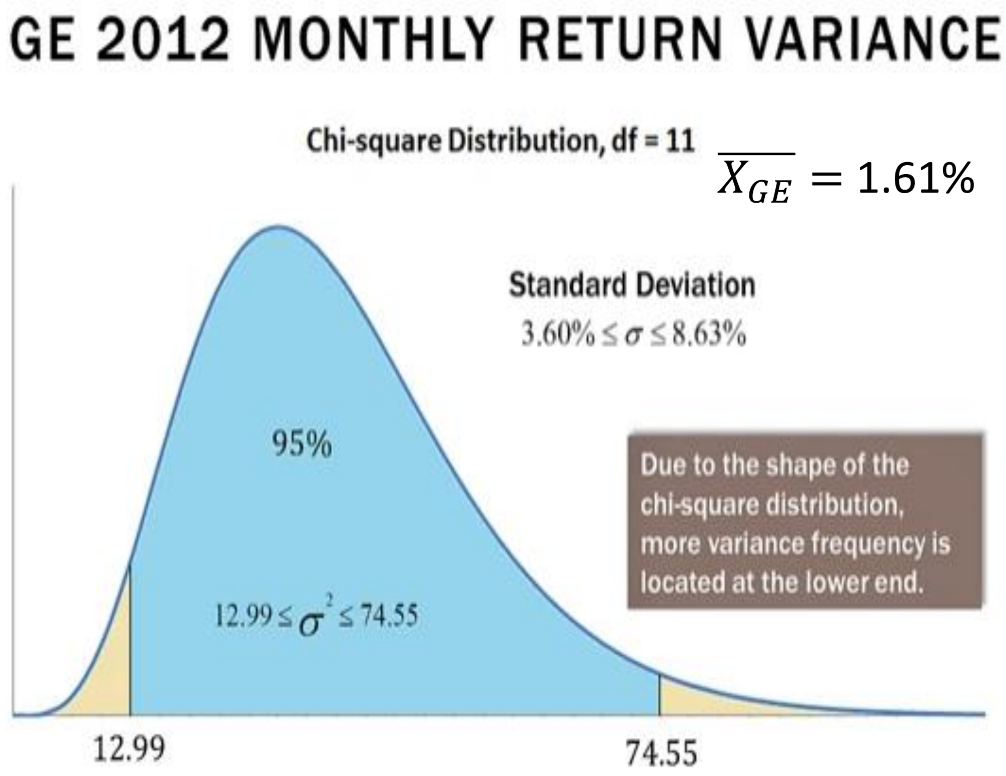
$$36.78 \le \sigma^2 \le 211.07$$

$$6.06\% \le \sigma \le 14.53\%$$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

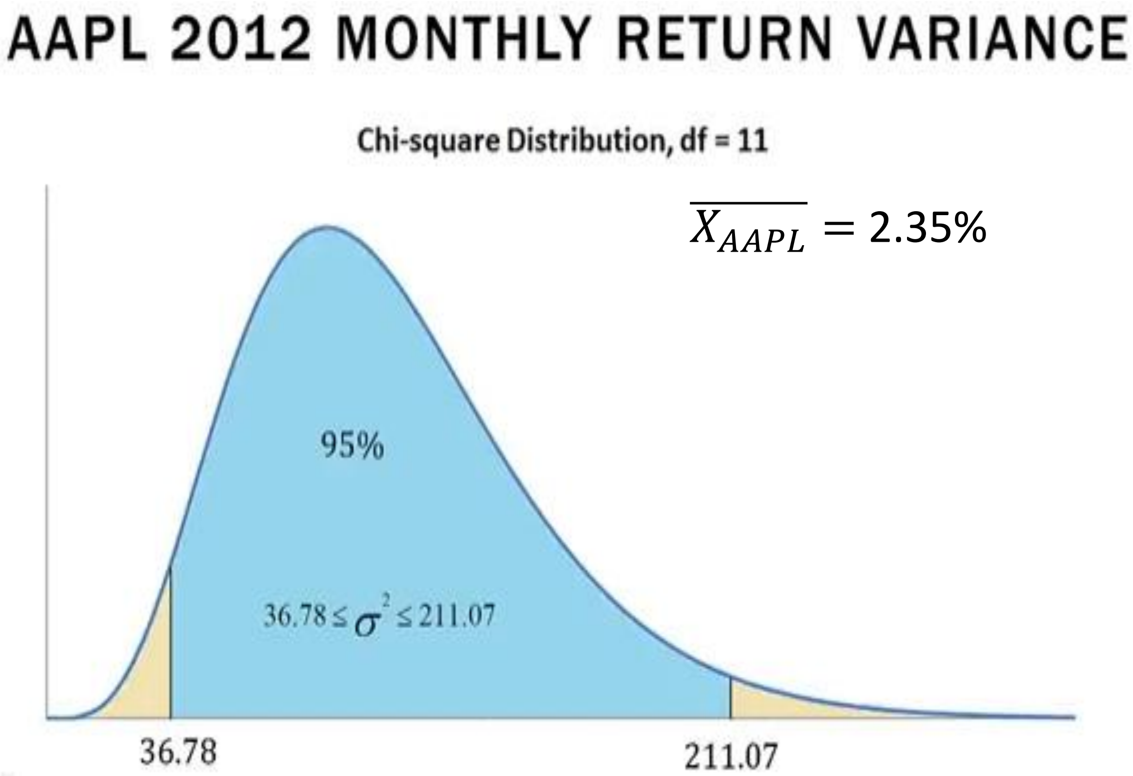
Intervalo de confiança para a variância – Populações normais

Exemplo (continuação):



$\overline{X_{GE}} = 1.61\%$

Amplitude do Intervalo = 61.56



$\overline{X_{AAPL}} = 2.35\%$

Amplitude do Intervalo = 174.29

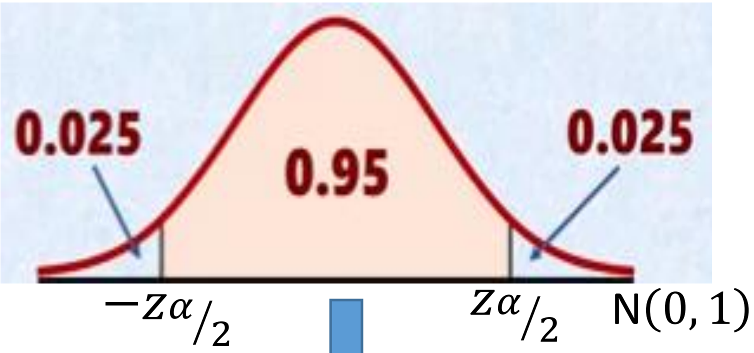
ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a proporção – Populações Bernoulli

Grau\nível de confiança$= 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$z_{\alpha/2}: P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$$

Intervalo aleatório para $\mu = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\boldsymbol{\mu} = \left(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}(\mathbf{1}-\bar{\boldsymbol{x}})}{\boldsymbol{n}}}, \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}(\mathbf{1}-\bar{\boldsymbol{x}})}{\boldsymbol{n}}}\right)$

ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Intervalo de confiança para a proporção – Populações Poisson

Grau\nível de confiança= $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

Variável Fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

$z_{\alpha/2}: P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$-z_{\alpha/2}$ $z_{\alpha/2}$ N(0, 1)

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}}{n}}} < z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} < \lambda < \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$$

Intervalo aleatório para $\lambda = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}}{n}}\right)$

Intervalo confiança para $\boldsymbol{\lambda} = \left(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{n}}}, \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z}_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{n}}}\right)$